



КГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КГУ»)

АКТУАЛИЗИРОВАНО
Решением Ученого совета ИЦТЭ КГУ
Протокол №7 от 24.03.2026

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института цифровых
технологий и экономики

_____ Э.И. Беляев

«30» мая 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.12.01 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Направление
подготовки

09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Квалификация

Бакалавр

г. Казань, 2023

Программу разработал(и):

Наименование кафедры	Должность, уч.степень, уч.звание	ФИО разработчика
Высшая математика	Проф., д.ф.-м.н.	Григорян С.А.
Высшая математика	Доцент, к.ф.-м.н.	Григорян Т.А.

Согласование	Наименование подразделения	Дата	№ протокола	Подпись
Одобрена	ВМ	15.05.23	7	_____ Зав.каф., д.ф.-м.н., доц. Ситдилов А. С.
Согласована	ЦСМ	19.05.23	5	_____ Зав.каф., к.ф.-м.н., доц. Смирнов Ю. Н.
Согласована	ИТИС	20.05.23	4	_____ Зав.каф., д.п.н., доц. Торкунова Ю. В.
Согласована	Учебно- методический совет ИЦТЭ	30.05.23	7	_____ Директор, к.т.н., доц. Беляев Э.И.
Одобрена	Ученый совет ИЦТЭ	30.05.23	9	_____ Директор, к.т.н., доц. Беляев Э.И.

1. Цель, задачи и планируемые результаты обучения по дисциплине

Целью изучения дисциплины является теоретическое освоение обучающимися основных разделов линейной алгебры, математического анализа, необходимых для понимания роли математики в профессиональной деятельности; формирования культуры мышления, способности к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения; освоения основных методов дисциплины, применяемых в решении профессиональных задач и научно-исследовательской деятельности.

Задачи дисциплины:

получить представление о роли математики в профессиональной деятельности;

познакомить с необходимым понятийным аппаратом дисциплины;

сформировать умения решать типовые задачи основных разделов линейной алгебры, математического анализа;

освоить типовые методы математического исследования прикладных вопросов по специальности;

сформировать умение использовать математический аппарат при решении прикладных задач.

Компетенции и индикаторы, формируемые у обучающихся:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора
ОПК-1 – Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.3 – Обладает навыками применения математического аппарата

2. Место дисциплины в структуре ОП

Последующие дисциплины (модули), практики, НИР, др.:

- Математический анализ,
- Теория вероятностей и математическая статистика,
- Математические модели и методы,
- Дискретная математика,
- Статистика.

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Структура дисциплины

Для очной формы обучения

Вид учебной работы	Всего ЗЕ	Всего часов	Семестр
			1
ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ	5	180	252
КОНТАКТНАЯ РАБОТА*	-	84	84

АУДИТОРНАЯ РАБОТА	1,88	68	68
Лекции	0,94	34	34
Практические (семинарские) занятия	0,94	34	34
Лабораторные работы	0	0	0
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ	3,12	112	112
Проработка учебного материала	2,12	76	76
Курсовой проект	0	0	0
Курсовая работа	0	0	0
Подготовка к промежуточной аттестации	1	36	36
Промежуточная аттестация:			Э
			-

Для заочной формы обучения

Вид учебной работы	Всего ЗЕ	Всего часов	Семестр
			1
ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ	5	180	180
КОНТАКТНАЯ РАБОТА	-	42	42
АУДИТОРНАЯ РАБОТА	0,5	18	18
Лекции	0,28	10	10
Практические (семинарские) занятия	0,22	8	8
Лабораторные работы	0	0	0
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩЕГОСЯ	4,5	162	162
Проработка учебного материала	4,25	153	153
Курсовой проект	0	0	0
Курсовая работа	0	0	0
Подготовка к промежуточной аттестации	0,25	9	9
Промежуточная аттестация:			Э
			-

3.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам и видам занятий

Разделы дисциплины	Всего часов	Распределение трудоемкости по видам учебной работы				Формы и вид контроля	Индексы индикаторов формируемых компетенций
		лекции	лаб. раб.	пр. зан.	сам. раб.		
Раздел 1. Матрицы и системы линейных уравнений	26	6		6	14	ТК1	ОПК-1.3, ЗУВ
Раздел 2. Линейные пространства	64	14		16	34	ТК1, ТК2	ОПК-1.3, ЗУВ

Раздел 3. Векторная алгебра	16	4		4	8	ТКЗ	ОПК-1.3, ЗУВ
Раздел 4. Прямые линии и плоскости	20	6		4	10	ТКЗ	ОПК-1.3, ЗУВ
Раздел 5. Линии и поверхности второго порядка	18	4		4	10	ТКЗ	ОПК-1.3, ЗУВ
Экзамен	36				36	ОМ 1	ОПК-1.3, ЗУВ
Итого за 1 семестр	180	34		34	112		
ИТОГО	180	34		34	112		

3.3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Матрицы и системы линейных уравнений.

Тема 1.1. Матрицы.

Понятие матрицы, размерность матрицы. Действия над матрицами. Произведение матриц. Элементарные преобразования.

Тема 1.2. Определители.

Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителей. Формула разложения по строке (по столбцу). Ранг матрицы.

Тема 1.3. Системы линейных уравнений.

Совместные, несовместные системы. Теорема Кронекера-Капелли. Обратная матрица. Формулы Крамера. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса.

Раздел 2. Линейные пространства.

Тема 2.1. Понятие линейного пространства.

Определение линейного пространства. Линейно независимые системы. Базис и размерность линейного пространства. Разложение вектора по базису, координаты вектора. Переход к новому базису.

Линейное подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Множество решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

Тема 2.2. Евклидовы пространства.

Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортонормированный базис. Ортогонализация Грама-Шмидта.

Ортогональные матрицы. QR-разложение матрицы, сингулярное разложение, полярное разложение матрицы. Нормальная Жорданова форма.

Тема 2.3. Линейные операторы.

Линейный оператор. Матрица линейного оператора. Матрица линейного оператора в новом базисе. Собственный вектор и собственное значение.

Тема 2.4. Квадратичные формы.

Билинейная форма. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Свойства симметричных матриц. Ранг и индекс квадратичной формы. Закон инерции. Канонический вид квадратичной формы. Знакоопределенность квадратичной формы. Закон Сильвестра.

Раздел 3. Векторная алгебра.

Тема 3.1. Векторы.

Определение вектора. Проекция вектора. Деление отрезка в заданном направлении. Векторы на плоскости и в пространстве. Направляющие косинусы.

Тема 3.2. Скалярное, смешанное и векторное произведения.

Скалярное произведение, его свойства. Векторное произведение. Смешанное произведение. Выражение векторного и смешанного произведения через координаты сомножителей. Площадь параллелограмма, объем параллелепипеда. Условия коллинеарности двух векторов, условие компланарности трех векторов.

Раздел 4. Прямые линии и плоскости.

Тема 4.1. Системы координат.

Декартова прямоугольная система координат. Полярная система координат. Цилиндрические и сферические координаты. Преобразования системы координат.

Тема 4.2. Прямая и плоскость.

Уравнения прямой линии на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Уравнение плоскости. Различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Уравнение прямой в пространстве. Прямая как пересечение плоскостей. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Раздел 5. Линии и поверхности второго порядка.

Тема 5.1. Кривые второго порядка.

Уравнение кривой второго порядка. Свойства кривых второго порядка: эллипс и его свойства, гипербола и ее свойства, парабола и ее свойства.

Тема 5.2. Поверхности второго порядка.

Виды поверхностей второго порядка.

3.4. Тематический план практических занятий

1. Действия над матрицами. Произведение матриц. Вычисление ранга матрицы.

2. Определитель, свойства определителя. Вычисление определителей различных порядков.

3. Нахождение обратной матрицы методом Жордана-Гаусса. Алгоритм вычисления обратной матрицы.

4. Решение систем линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера. Решение систем методом Гаусса.

5. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость векторов. Координаты вектора в заданном базисе. Координаты вектора в новом базисе.

6. Сумма и пересечение подпространств. Базис суммы и пересечения. Ранг системы векторов.

7. Фундаментальная система решений.

8. Линейные операторы. Нахождение матрицы линейного оператора. Матрица линейного оператора в новом базисе.

9. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы к диагональному виду.

10. Ортонормированный базис. Построение ортогональной системы векторов методом Грама-Шмидта.

11. Ортогональные матрицы. Симметричные матрицы. Сингулярное разложение матрицы. Полярное разложение. Жорданова нормальная форма.

12. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность.

13. Вектор на плоскости и в пространстве. Деление отрезка в заданном соотношении. Проекция вектора на ось.

14. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений. Приложения произведений.

15. Системы координат. Преобразования координат: поворот на угол и параллельный перенос.

16. Уравнение прямой на плоскости.

17. Уравнения плоскости.

18. Уравнение прямой в пространстве.

19. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

20. Поверхности второго порядка. Поверхности вращения.

3.5. Тематический план лабораторных работ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

3.6. Курсовой проект /курсовая работа

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

4. Оценивание результатов обучения

Оценивание результатов обучения по дисциплине осуществляется в рамках текущего контроля и промежуточной аттестации, проводимых по балльно-рейтинговой системе (БРС).

Шкала оценки результатов обучения по дисциплине:

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Уровень сформированности индикатора компетенции			
			Высокий	Средний	Ниже среднего	Низкий
			от 85 до 100	от 70 до 84	от 55 до 69	от 0 до 54
			Шкала оценивания			
			отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
			зачтено			не зачтено
ОПК-1	ОПК-1.3	знать:				
		Основные понятия и утверждения линейной алгебры и аналитической геометрии	Знает основные понятия и утверждения. Не допускает ошибок	Знает основные понятия и утверждения. Может допустить несколько	Плохо знает основные понятия и утверждения, допускает много	Уровень знаний ниже минимального, допускает грубые ошибки

				негрубых ошибок	мелких ошибок	
		уметь:				
		выполнять действия над матрицами; находить матрицу, обратную данной; находить ранг матрицы; записывать в матричной форме систему линейных уравнений; применять различные методы решения СЛАУ; вычислять скалярное, векторное, смешанное произведение векторов; находить собственные числа и собственные векторы линейного оператора; исследовать квадратичную форму на знакоопределенность, приводить ее к каноническому виду; строить уравнения прямой линии на плоскости и пространстве, уравнения плоскости в пространстве, кривые второго порядка, поверхности второго порядка.	Умеет решать математические задачи, не допускает ошибок	Умеет решать основные математические задачи, допускает небольшие ошибки	Умеет решать типовые математические задачи, допускает много мелких ошибок	При решении типовых задач допускает грубые ошибки
		владеть:				

		навыками употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов; навыками символьных преобразований математических выражений; записывать математическую постановку типовой текстовой задачи; основными аналитическими методами решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений; методами исследования и приведения к каноническому виду квадратичных форм; методами построения прямых и плоскостей, исследования их взаимного расположения; методами линейного преобразования евклидовых пространств: сингулярного, полярного разложения.	Владеет в полном объеме, не допускает ошибок	Владеет навыками в достаточн ом объеме, допускает мелкие ошибки	Владеет слабо, допускает много ошибок	Не владеет навыкам и, допускае т грубые ошибки
--	--	--	---	---	---	--

Оценочные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации приведены в Приложении к рабочей программе дисциплины.

Полный комплект заданий и материалов, необходимых для оценивания результатов обучения по дисциплине, хранится на кафедре разработчика.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Учебно-методическое обеспечение

5.1.1. Основная литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 19-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-9223-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/189312>.

2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 496 с. — ISBN 978-5-8114-9224-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/190976>.

3. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры: учебник / А. И. Мальцев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-1009-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210299>.

4. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-9039-4. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/183752>.

5.1.2. Дополнительная литература

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / П. С. Александров. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 512 с. — ISBN 978-5-507-44758-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/242861>.

2. Глухов, М. М. Алгебра: учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-9182-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/187793>.

3. Горлач, Б. А. Линейная алгебра: учебное пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-1427-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210983>.

4. Мальцев, И. А. Линейная алгебра: учебное пособие / И. А. Мальцев. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-1011-8. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210503>.

5.2. Информационное обеспечение

5.2.1. Электронные и интернет-ресурсы

1. Портал «Открытое образование», <http://npoed.ru>;
2. Электронный учебный курс «Линейная алгебра (09 УГСН)», <https://lms.kgeu.ru/course/view.php?id=2470>;
3. Электронный учебный курс «Линейная алгебра (ЗФО)», <https://lms.kgeu.ru/course/view.php?id=3497>.

5.2.2. Профессиональные базы данных / Информационно-справочные системы

1. Общероссийский математический портал, <http://www.mathnet.ru/>;
2. Российская национальная библиотека, <http://nlr.ru/>;
3. Российская государственная библиотека, <http://www.rsl.ru/>;
3. Национальная электронная библиотека, <https://rusneb.ru/>;
4. Научная электронная библиотека, <http://www.elibrary.ru/>;
5. Единое окно доступа к образовательным ресурсам, <http://window.edu.ru/>.

5.2.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение дисциплины

№ п/п	Наименование программного обеспечения	Описание	Реквизиты подтверждающих документов
1	Windows 7 Профессиональная (сертифицированная ФСТЭК)	Пользовательская операционная система	"ЗАО ""ТаксНет-Сервис"" №ПО-ЛИЦ 0000/2014 от 27.05.2014 Неискл. право. Бессрочно
2	Браузер Chrome	Система поиска информации в сети интернет	Свободная лицензия Неискл. право. Бессрочно
3	LMS Moodle	ПО для эффективного онлайн- взаимодействия преподавателя и студента	Свободная лицензия Неискл. право. Бессрочно
4	Adobe Flash Player	Подключаемый модуль для браузера и среды выполнения веб -	Свободная лицензия Неискл. право. Бессрочно
5	Office Professional Plus 2007 Windows32 Russian DiskKit MVL CD	Пакет программных продуктов, содержащий в себе необходимые офисные программы	ЗАО "СофтЛайнТрейд" №225/10 от 28.01.2010 Неискл. право. Бессрочно
6	Office Standard 2007 Russian OLP NL AcademicEdition+	Пакет программных продуктов, содержащий в себе необходимые офисные программы	ЗАО "СофтЛайнТрейд" №21/2010 от 04.05.2010 Неискл. право. Бессрочно

6. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Наименование вида учебной работы	Наименование учебной аудитории, специализированной лаборатории	Перечень необходимого оборудования и технических средств обучения
Лекции	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа	Специализированная учебная мебель, технические средства обучения, служащие для представления учебной информации большой аудитории (мультимедийный проектор, компьютер (ноутбук), экран), демонстрационное оборудование, учебно-наглядные пособия
Практические занятия	Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Специализированная учебная мебель, технические средства обучения (мультимедийный проектор, компьютер (ноутбук), экран) и др.
Самостоятельная работа	Компьютерный класс с выходом в Интернет В-600а	Специализированная учебная мебель на 30 посадочных мест, 30 компьютеров, технические средства обучения (мультимедийный проектор, компьютер (ноутбук), экран), видеокамеры, программное обеспечение
	Читальный зал библиотеки	Специализированная мебель, компьютерная техника с возможностью выхода в Интернет и обеспечением доступа в ЭИОС, экран, мультимедийный проектор, программное обеспечение

7. Особенности организации образовательной деятельности для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Лица с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) и инвалиды имеют возможность беспрепятственно перемещаться из одного учебно-лабораторного корпуса в другой, подняться на все этажи учебно-лабораторных корпусов, заниматься в учебных и иных помещениях с учетом особенностей психофизического развития и состояния здоровья.

Для обучения лиц с ОВЗ и инвалидов, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, обеспечены условия беспрепятственного доступа во все учебные помещения. Информация о специальных условиях, созданных для обучающихся с ОВЗ и инвалидов, размещена на сайте университета www/kgeu.ru. Имеется возможность оказания технической помощи ассистентом, а также услуг сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков.

Для адаптации к восприятию лицами с ОВЗ и инвалидами с нарушенным слухом справочного, учебного материала по дисциплине

обеспечиваются следующие условия:

- для лучшей ориентации в аудитории, применяются сигналы оповещения о начале и конце занятия (слово «звонок» пишется на доске);
- внимание слабослышащего обучающегося привлекается педагогом жестом (на плечо кладется рука, осуществляется нерезкое похлопывание);
- разговаривая с обучающимся, педагогический работник смотрит на него, говорит ясно, короткими предложениями, обеспечивая возможность чтения по губам.

Компенсация затруднений речевого и интеллектуального развития слабослышащих обучающихся проводится путем:

- использования схем, диаграмм, рисунков, компьютерных презентаций с гиперссылками, комментирующими отдельные компоненты изображения;
- регулярного применения упражнений на графическое выделение существенных признаков предметов и явлений;
- обеспечения возможности для обучающегося получить адресную консультацию по электронной почте по мере необходимости.

Для адаптации к восприятию лицами с ОВЗ и инвалидами с нарушениями зрения справочного, учебного, просветительского материала, предусмотренного образовательной программой по выбранному направлению подготовки, обеспечиваются следующие условия:

- ведется адаптация официального сайта в сети Интернет с учетом особых потребностей инвалидов по зрению, обеспечивается наличие крупношрифтовой справочной информации о расписании учебных занятий;
- педагогический работник, его собеседник (при необходимости), присутствующие на занятии, представляются обучающимся, при этом каждый раз называется тот, к кому педагогический работник обращается;
- действия, жесты, перемещения педагогического работника коротко и ясно комментируются;
- печатная информация предоставляется крупным шрифтом (от 18 пунктов), тотально озвучивается;
- обеспечивается необходимый уровень освещенности помещений;
- предоставляется возможность использовать компьютеры во время занятий и право записи объяснений на диктофон (по желанию обучающихся).

Форма проведения текущей и промежуточной аттестации для обучающихся с ОВЗ и инвалидов определяется педагогическим работником в соответствии с учебным планом. При необходимости обучающемуся с ОВЗ, инвалиду с учетом их индивидуальных психофизических особенностей дается возможность пройти промежуточную аттестацию устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п., либо предоставляется дополнительное время для подготовки ответа.

8. Методические рекомендации для преподавателей по организации воспитательной работы с обучающимися.

Методическое обеспечение процесса воспитания обучающихся выступает одним из определяющих факторов высокого качества образования.

Преподаватель вуза, демонстрируя высокий профессионализм, эрудицию, четкую гражданскую позицию, самодисциплину, творческий подход в решении профессиональных задач, в ходе образовательного процесса способствует формированию гармоничной личности.

При реализации дисциплины преподаватель может использовать следующие методы воспитательной работы:

- методы формирования сознания личности (беседа, диспут, внушение, инструктаж, контроль, объяснение, пример, самоконтроль, рассказ, совет, убеждение и др.);

- методы организации деятельности и формирования опыта поведения (задание, общественное мнение, педагогическое требование, поручение, приучение, создание воспитывающих ситуаций, тренинг, упражнение, и др.);

- методы мотивации деятельности и поведения (одобрение, поощрение социальной активности, порицание, создание ситуаций успеха, создание ситуаций для эмоционально-нравственных переживаний, соревнование и др.)

При реализации дисциплины преподаватель должен учитывать следующие направления воспитательной деятельности:

Гражданское и патриотическое воспитание:

- формирование у обучающихся целостного мировоззрения, российской идентичности, уважения к своей семье, обществу, государству, принятым в семье и обществе духовно-нравственным и социокультурным ценностям, к национальному, культурному и историческому наследию, формирование стремления к его сохранению и развитию;

- формирование у обучающихся активной гражданской позиции, основанной на традиционных культурных, духовных и нравственных ценностях российского общества, для повышения способности ответственно реализовывать свои конституционные права и обязанности;

- развитие правовой и политической культуры обучающихся, расширение конструктивного участия в принятии решений, затрагивающих их права и интересы, в том числе в различных формах самоорганизации, самоуправления, общественно-значимой деятельности;

- формирование мотивов, нравственных и смысловых установок личности, позволяющих противостоять экстремизму, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам, межэтнической и межконфессиональной нетерпимости, другим негативным социальным явлениям.

Духовно-нравственное воспитание:

- воспитание чувства достоинства, чести и честности, совестливости, уважения к родителям, учителям, людям старшего поколения;

- формирование принципов коллективизма и солидарности, духа милосердия и сострадания, привычки заботиться о людях, находящихся в трудной жизненной ситуации;

- формирование солидарности и чувства социальной ответственности по отношению к людям с ограниченными возможностями здоровья, преодоление психологических барьеров по отношению к людям с

ограниченными возможностями;

- формирование эмоционально насыщенного и духовно возвышенного отношения к миру, способности и умения передавать другим свой эстетический опыт.

Культурно-просветительское воспитание:

- формирование эстетической картины мира;

- формирование уважения к культурным ценностям родного города, края, страны;

- повышение познавательной активности обучающихся.

Научно-образовательное воспитание:

- формирование у обучающихся научного мировоззрения;

- формирование умения получать знания;

- формирование навыков анализа и синтеза информации, в том числе в профессиональной области.

Вносимые изменения и утверждения на новый учебный год

№ п/п	№ раздела внесения изменений	Дата внесения изменений	Содержание изменений	«Согласовано» Зав. каф. реализующей дисциплину	«Согласовано» председатель УМК института (факультета), в состав которого входит выпускающая
1	2	3	4	5	6
1					
2					
3					

*Приложение к рабочей
программе дисциплины*



КГУ

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КГУ»)**

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
по дисциплине**

Б1.О.12.01 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

(Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом)

г. Казань, 2023

2. Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации

Шкала оценки результатов обучения по дисциплине:

Код компетенции	Код индикатора компетенции	Запланированные результаты обучения по дисциплине	Уровень сформированности индикатора компетенции			
			Высокий	Средний	Ниже среднего	Низкий
			от 85 до 100	от 70 до 84	от 55 до 69	от 0 до 54
			Шкала оценивания			
			отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
			зачтено			не зачтено
ОПК-1	ОПК-1.3	знать:				
		Основные понятия и утверждения линейной алгебры и аналитической геометрии	Знает основные понятия и утверждения. Не допускает ошибок	Знает основные понятия и утверждения. Может допустить несколько негрубых ошибок	Плохо знает основные понятия и утверждения, допускает много мелких ошибок	Уровень знаний ниже минимального, допускает грубые ошибки
		уметь:				
		выполнять действия над матрицами; находить матрицу, обратную данной; находить ранг матрицы; записывать в матричной форме систему линейных уравнений; применять различные методы решения СЛАУ; вычислять скалярное, векторное, смешанное произведение векторов; находить собственные числа и собственные векторы линейного оператора; исследовать квадратичную форму на знакоопределенность, приводить ее к	Умеет решать математические задачи, не допускает ошибок	Умеет решать основные математические задачи, допускает небольшие ошибки	Умеет решать типовые математические задачи, допускает много мелких ошибок	При решении типовых задач допускает грубые ошибки

		каноническому виду; строить уравнения прямой линии на плоскости и пространстве, уравнения плоскости в пространстве, кривые второго порядка, поверхности второго порядка.				
		владеть:				
		навыками употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов; навыками символьных преобразований математических выражений; записывать математическую постановку типовой текстовой задачи; основными аналитическими методами решения алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений; методами исследования и приведения к каноническому виду квадратичных форм; методами построения прямых и плоскостей, исследования их взаимного расположения; методами линейного	Владеет в полном объеме, не допускает ошибок	Владеет навыками в достаточном объеме, допускает мелкие ошибки	Владеет слабо, допускает много ошибок	Не владеет навыками, допускает грубые ошибки

		преобразования евклидовых пространств: сингулярного, полярного разложения.				
--	--	---	--	--	--	--

Оценка **«отлично»** выставляется, если обучающийся выполняет контрольные работы в семестре, тестовые задания, выполняет задания коллоквиума, полно и аргументированно отвечает на вопросы билета; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, самостоятельно решить предложенные задания, требующие дополнительного анализа и поиска нужных свойств и правил; излагает материал последовательно и правильно;

Оценка **«хорошо»** выставляется, если обучающийся выполняет контрольные работы в семестре, тестовые задания, выполняет задания коллоквиума, полно и аргументированно отвечает на вопросы билета; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, самостоятельно решить предложенные задания, требующие дополнительного анализа и поиска нужных свойств и правил; излагает материал последовательно и правильно, но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет;

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если обучающийся выполняет контрольные работы в семестре, тестовые задания, выполняет задания коллоквиума;

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется за слабое и неполное выполнение контрольных работ в семестре, тестовых заданий и коллоквиума.

3. Перечень оценочных средств

Краткая характеристика оценочных средств, используемых при текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающегося по дисциплине:

Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Описание оценочного средства
Контрольная работа (КнТР)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам

Коллоквиум (К)	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися	Вопросы по темам / разделам дисциплины
Тест (Тест)	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося	Комплект тестовых заданий

4. Перечень контрольных заданий или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины

Для текущего контроля ТК1.

Проверяемая компетенция: ОПК-1, ОПК-1.3 – Обладает навыками применения математического аппарата.

Контрольная работа.

1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Найдите ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -5 & -13 & -10 \end{pmatrix}$

4. Найдите ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

5. Решите систему методом Крамера:
$$\begin{cases} 3x - y - z = -3, \\ 2x + 2y + 4z = 0, \\ -x - 3y + z = 5. \end{cases}$$

6. Решите систему методом Крамера:
$$\begin{cases} 4x - y + z = -6, \\ 2x + 2y - 3z = 3, \\ -x - y + 4z = -4. \end{cases}$$

7. Решите систему матричным методом:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - 4y + 2z = -1, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

8. Решите систему матричным методом:
$$\begin{cases} -x + y - 3z = 1, \\ 2x + 4y + z = 0, \\ -x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

9. Решите систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

10. Решите систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Тест.

1. В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов степени не выше 2 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ задан базис $e = (x^2; x; 1)$. Каковы координаты p_1, p_2, p_3 вектора $p(x)$ в этом базисе, если $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$?

Ответ: $p_1 =$, $p_2 =$, $p_3 =$.

2. Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ выберите операторы, которые являются линейными.

Выберите один или несколько вариантов ответов:

$A(x) = (5x_3 + 4x_1; x_3; x_1 + 6);$

$A(x) = (x_1^2; x_2; x_3^4);$

$A(x) = (x_1 - x_3; x_2 + 5x_3; x_1 + 4x_2);$

$A(x) = (3x_2 + x_1; 0; x_1 + 4x_3);$

3. Запишите матрицу линейного оператора A , если

$$A(x) = (x_2 - x_3; x_1 + x_2; 5x_3 - x_2).$$

Ответ: $A = (\quad)$.

4. Запишите матрицу перехода S от базиса $e = (e_1; e_2; e_3)$ к новому базису $e^* = (e_1^*; e_2^*; e_3^*)$, если

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ e_2^* = 3e_1 + 4e_2, \\ e_3^* = e_1 - 3e_3. \end{cases}$$

Ответ: $S = (\quad)$.

5. В базисе $e = (e_1; e_2; e_3)$ линейный оператор задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора $x = 4e_1 + e_2 - e_3$ при отображении A .

Ответ: $A(x) =$

6. Найдите собственные числа линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе запишите собственные числа в порядке возрастания:

$\lambda_1 = \quad$, $\lambda_2 = \quad$, $\lambda_3 = \quad$.

7. Найдите значение параметра p , при котором векторы a_1, a_2, a_3, a_4 являются линейно зависимыми, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 17 \\ p \end{pmatrix}.$$

Ответ: $p =$

8. Запишите матрицу квадратичной формы $f = x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Выберите один ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите ранг $r(f)$ квадратичной формы

$$f = 6x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Ответ: $r(f) =$

10. Установите правильную последовательность действий при нахождении собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

- | | |
|-------|--|
| Шаги: | Варианты действий: |
| Шаг 1 | Составим характеристическое уравнение |
| Шаг 2 | Найдем обратную матрицу |
| Шаг 3 | Найдем действительные корни характеристического уравнения |
| Шаг 4 | Составим матрицу линейного оператора
Для каждого собственного значения найдем ФСР
однородной системы уравнений |

Для текущего контроля ТК2.

Проверяемая компетенция: ОПК-1, ОПК-1.3 – Обладает навыками применения математического аппарата.

Контрольная работа.

Дана матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3) : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти

- образ вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ при отображении A .
- собственные числа и собственные векторы этого оператора.
- матрицу A' этого оператора в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , если $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ e'_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_3 = e_1 + e_2 + 2e_3; \end{cases}$
- координаты вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) .
- Найдите размерность и базис линейной оболочки системы векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Найдите сингулярное разложение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Найдите полярное разложение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- По заданной системе векторов:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

постройте ортонормированную систему методом Грама-Шмидта.

9. Приведите квадратичную форму к каноническому виду и определите ее

знак: $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;

10. Даны линейные подпространства U , W , порожденные системам векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

и

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите базисы подпространств $U + W$, $U \cap W$.

Для текущего контроля ТКЗ.

Проверяемая компетенция: ОПК-1, ОПК-1.3 – Обладает навыками применения математического аппарата.

Тест.

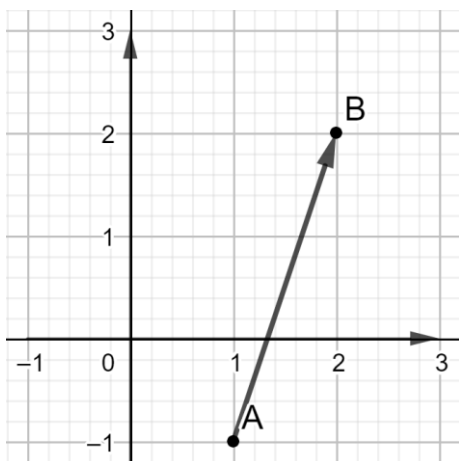
1. Найдите длину вектора $\vec{a} = (-6; 5; -2\sqrt{15})$.

2. При каком значении α векторы $\vec{a} = (8; -\alpha; 2)$ и $\vec{b} = (-1; -2; -3)$ ортогональны?

3. Скалярное произведение векторов обозначается:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|; \quad (\vec{a}, \vec{b}); \quad |\vec{a} \times \vec{b}|; \quad \vec{a} \times \vec{b}$$

4. Определите по рисунку координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.



5. Даны точки $A(1;1;1)$, $B(-2;4;0)$, $C(3;-4;5)$.

Установите верное соответствие между действиями над векторами и их координатами:

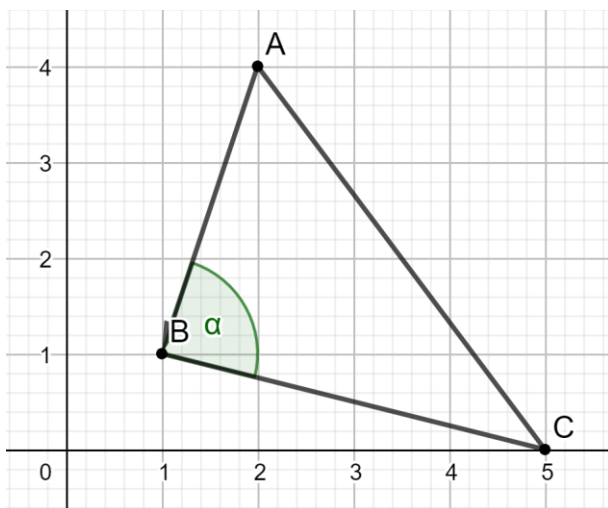
- | | |
|---|--------------------|
| А. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ | 1. $(3; -3; 1)$ |
| Б. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$ | 2. $(-3; 3; -1)$ |
| В. $4\overrightarrow{AB}$ | 3. $(-12; 12; -4)$ |
| | 4. $(7; -13; 9)$ |

6. Объём треугольной пирамиды, построенное на векторах $\vec{a} = (3; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; 2)$, $\vec{c} = (1; -2; 0)$, равен. Введите ответ:

7. Даны точки $A(0;1;2)$, $B(-2;4;1)$, $C(1;-1;3)$. Найдите $np_{\overline{AB}} \overline{AC}$.

$-\frac{\sqrt{26}}{2}$	13	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{9\sqrt{14}}{14}$	$-\frac{3\sqrt{21}}{14}$
------------------------	----	------------------------	--------------------------	--------------------------

8. Дан треугольник ABC (см. рисунок). Найдите $\cos \alpha$.



Выберите один ответ:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

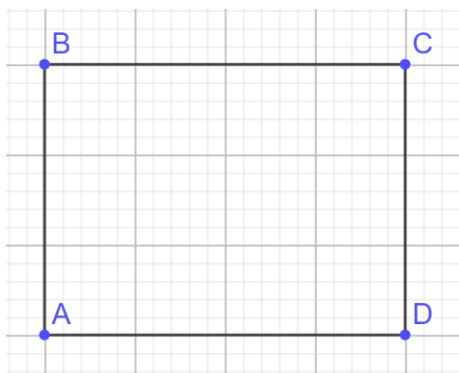
$$\frac{\sqrt{170}}{170}$$

$$\frac{9\sqrt{10}}{50}$$

$$-\frac{\sqrt{170}}{170}$$

$$-\frac{9\sqrt{10}}{50}$$

9. Дан прямоугольник $ABCD$.



Отметьте все пары коллинеарных векторов.

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AD} \text{ и } \overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \text{ и } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.$$

10. Пусть φ - угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Установите соответствие между знаком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и величиной угла φ .

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

1. $\varphi = 0^\circ$

Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

2. $\varphi = 90^\circ$

В. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3. $0^\circ < \varphi < 90^\circ$

4. $90^\circ < \varphi < 180^\circ$

Контрольная работа.

1. Найти угол между прямыми: $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y - 16 = 0$.
2. Найти расстояние от точки $M_0(-12, 7, -1)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$.
4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 3)$ параллельно прямой l_1 , если прямая l_1 проходит через точки $M_1(-3, 5)$, $M_2(1, -2)$.
5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 3, 0)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(2, 0, -3)$.

6. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости Ω

$$l: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1},$$

$$\Omega: 3x - 4y + z - 5 = 0.$$

7. Составьте канонические уравнения прямой l , заданной общими уравнениями:

$$l: \begin{cases} -x + y = 1, \\ 5x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

8. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1, 1, -1)$ параллельно прямой l_1 , если

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}.$$

9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 3, 0)$ и параллельной прямым l_1, l_2 , если

$$l_1: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y + 5z + 1 = 0, \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} -x + y = 1, \\ 5x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые l_1, l_2

$$l_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad l_2: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{1}.$$

11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые l_1, l_2

$$l_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad l_2: \frac{x+5}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

12. Найдите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3, -2)$ перпендикулярно прямой l_1 и пересекающей прямую l_2 , если

$$l_1: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}, \quad l_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{5}.$$

13. Составьте уравнение касательных к окружности $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$, проходящих через точку $M(1; 4)$.

14. Составьте каноническое уравнение гиперболы, содержащей точку $M(-1; 3)$ и имеющей асимптоты $y = \pm 2x$.

15. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составьте это уравнение, если фокусами эллипса являются точки $(\pm 2; 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$.

Для коллоквиума.

Теоретические вопросы для коллоквиума.

1. Матрица, размерность матрицы. Линейные действия над матрицами.
2. Произведение матриц. Транспонирование.
3. Определитель матрицы. Свойства определителя. Ранг матрицы.
4. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
5. Базис линейного пространства. Координаты вектора в разных базисах.
6. Линейный оператор.
7. Собственные числа и собственные векторы.
8. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Знакоопределенность.
9. Направление и длина вектора.
10. Коллинеарные векторы, компланарные векторы.
11. Проекция вектора на число (определение, формула для вычисления проекции, свойства).
12. Скалярное произведение векторов, его свойства. Угол между векторами (формула).
13. Векторное произведение векторов, его свойства. Формула для вычисления векторного произведения, вычисление площадей.
14. Смешанное произведение векторов, его свойства. Формула для вычисления смешанного произведения, вычисление объемов.
15. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

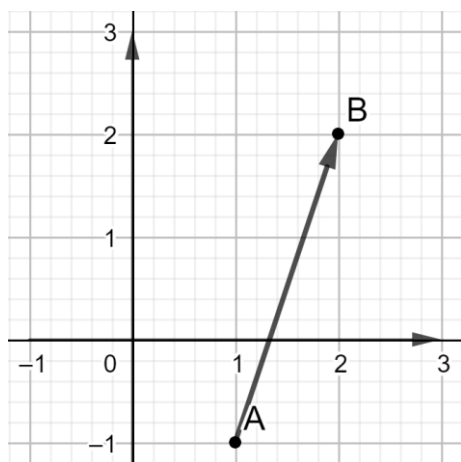
Тестовые задания для коллоквиума.

1. Найдите длину вектора $\vec{a} = (-6; 5; -2\sqrt{15})$.
2. При каком значении α векторы $\vec{a} = (8; -\alpha; 2)$ и $\vec{b} = (-1; -2; -3)$ ортогональны?

3. Скалярное произведение векторов обозначается:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|; \quad (\vec{a}, \vec{b}); \quad |\vec{a} \times \vec{b}|; \quad \vec{a} \times \vec{b}$$

4. Определите по рисунку координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.



5. Даны точки $A(1;1;1)$, $B(-2;4;0)$, $C(3;-4;5)$.

Установите верное соответствие между действиями над векторами и их координатами:

A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

1. $(3; -3; 1)$

Б. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

2. $(-3; 3; -1)$

В. $4\overrightarrow{AB}$

3. $(-12; 12; -4)$

4. $(7; -13; 9)$

6. Объем треугольной пирамиды, построенное на векторах $\vec{a} = (3; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; 2)$, $\vec{c} = (1; -2; 0)$, равен. Введите ответ:

7. Даны точки $A(0;1;2)$, $B(-2;4;1)$, $C(1;-1;3)$. Найдите $np_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$.

$$-\frac{\sqrt{26}}{2}$$

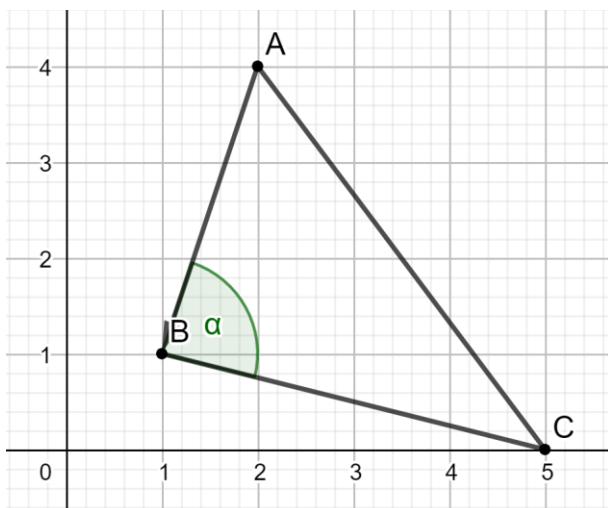
$$13$$

$$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$-\frac{9\sqrt{14}}{14}$$

$$-\frac{3\sqrt{21}}{14}$$

8. Дан треугольник ABC (см. рисунок). Найдите $\cos \alpha$.



Выберите один ответ:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

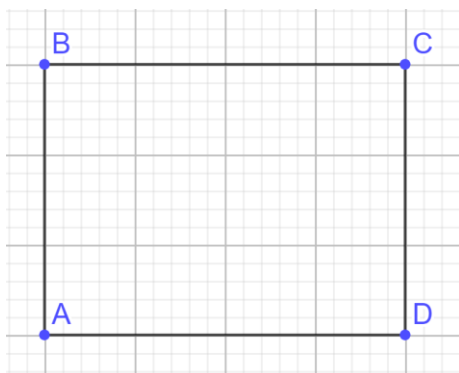
$$\frac{\sqrt{170}}{170}$$

$$\frac{9\sqrt{10}}{50}$$

$$-\frac{\sqrt{170}}{170}$$

$$-\frac{9\sqrt{10}}{50}$$

9. Дан прямоугольник $ABCD$.



Отметьте все пары коллинеарных векторов.

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD};$$

$$\overrightarrow{AD} \text{ и } \overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC};$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \text{ и } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}.$$

10. Пусть φ - угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Установите соответствие между знаком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и величиной угла φ .

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

1. $\varphi = 0^\circ$

Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

2. $\varphi = 90^\circ$

В. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3. $0^\circ < \varphi < 90^\circ$

4. $90^\circ < \varphi < 180^\circ$

11. В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов степени не выше 2 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ задан базис $e = (x^2; x; 1)$. Каковы координаты p_1, p_2, p_3 вектора $p(x)$ в этом базисе, если $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$?

Ответ: $p_1 =$, $p_2 =$, $p_3 =$.

12. Для произвольного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ выберите операторы, которые являются линейными.

Выберите один или несколько вариантов ответов:

$$A(x) = (5x_3 + 4x_1; x_3; x_1 + 6);$$

$$A(x) = (x_1^2; x_2; x_3^4);$$

$$A(x) = (x_1 - x_3; x_2 + 5x_3; x_1 + 4x_2);$$

$$A(x) = (3x_2 + x_1; 0; x_1 + 4x_3);$$

13. Запишите матрицу линейного оператора A , если

$$A(x) = (x_2 - x_3; x_1 + x_2; 5x_3 - x_2).$$

Ответ: $A = ($).

14. Запишите матрицу перехода S от базиса $e = (e_1; e_2; e_3)$ к новому базису $e^* = (e_1^*; e_2^*; e_3^*)$, если

$$\begin{cases} e_1^* = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ e_2^* = 3e_1 + 4e_2, \\ e_3^* = e_1 - 3e_3. \end{cases}$$

Ответ: $S = ($).

15. В базисе $e = (e_1; e_2; e_3)$ линейный оператор задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите образ вектора $x = 4e_1 + e_2 - e_3$ при отображении A .

Ответ: $A(x) =$

16. Найдите собственные числа линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе запишите собственные числа в порядке возрастания:

$\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$, $\lambda_3 =$.

17. Найдите значение параметра p , при котором векторы a_1, a_2, a_3, a_4 являются линейно зависимыми, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 17 \\ p \end{pmatrix}.$$

Ответ: $p =$

18. Запишите матрицу квадратичной формы $f = x_1^2 - 2x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Выберите один ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

19. Найдите ранг $r(f)$ квадратичной формы

$$f = 6x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Ответ: $r(f) =$

20. Установите правильную последовательность действий при нахождении собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

Шаги:	Варианты действий:
Шаг 1	Составим характеристическое уравнение
Шаг 2	Найдем обратную матрицу
Шаг 3	Найдем действительные корни характеристического уравнения
Шаг 4	Составим матрицу линейного оператора
	Для каждого собственного значения найдем ФСР однородной системы уравнений

Для промежуточной аттестации.

Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса: один на знание основных определений, свойства, теорем и формул, второй – на доказательство. Также экзаменационный билет содержит две задачи, базового и повышенного уровней.

Теоретические вопросы к экзамену.

Матрицы и определители

Понятие матрицы. Размерность матрицы. Диагональная матрица. Единичная матрица. Действия над матрицами. Свойства. Правило умножения матриц. Транспонирование матриц. Свойства действий над матрицами.

Определители. Порядок определителя. Формула разложения по строке (столбцу). Свойства определителя. Невырожденная матрица. Вычисление обратной матрицы (по алгоритму, методом Жордана-Гаусса). Ранг матрицы.

Системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений. Матрица коэффициентов. Совместные и несовместные системы. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Крамера, в каких случаях он применим. Матричный метод. Метод Гаусса, прямой и обратный ход.

Линейные пространства

Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств (как задаются операции сложения и умножения на число в данных пространствах, нейтральный и противоположный элементы). Линейно независимая система векторов. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в линейном пространстве. Единственность разложения по базису (доказательство). Матрица перехода к новому базису (правило составления матрицы). Координаты вектора в новом базисе (формула). Подпространства линейных пространств. Сумма и пересечение линейных пространств. Формула Грассмана.

Линейные операторы

Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора (правило составления). Матрица линейного оператора в новом базисе (формула). Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (определение и свойства). Характеристический многочлен, характеристическое уравнение. Правило отыскания собственных значений и векторов. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (доказательство).

Евклидовы пространства

Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского (доказательство). Определение евклидова пространства. Определение угла между векторами в евклидовом пространстве. Матрица Грама. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Ортогональность собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (доказательство). Ортогонализация Грама-Шмидта (процесс построения ортонормированной системы векторов по заданной линейно независимой системе, формулы). Матрица линейного оператора в собственном базисе (вывод).

Ортогональная матрица. Сингулярное разложение матрицы, полярное разложение матрицы. Жорданова нормальная форма.

Билинейные и квадратичные формы

Билинейная форма (координатная и матричная запись). Матрица билинейной формы. Симметричная билинейная форма и ее матрица. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы. Теорема Лагранжа. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью собственных значений. Знакоопределенность квадратичной

формы. Критерий Сильвестра. Положительный и отрицательный индекс, ранг квадратичной формы. Закон инерции.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Прямоугольная и полярная системы координат. Формулы, связывающие прямоугольный и полярные координаты.

Уравнение прямой на плоскости, основные виды уравнений. Угол между прямыми, частные случаи. Формула для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости.

Уравнение плоскости в пространстве. Нормальный вектор. Основные виды уравнений. Угол между плоскостями, частные случаи. Расстояние от точки до плоскости.

Уравнение прямой в пространстве. Направляющий вектор. Основные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Кривые второго порядка. Канонические кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола (вывод канонических уравнений).

Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Конические поверхности. Эллипсоид. Гиперболоид. Параболоид.

Практические задания к экзамену.

Базовые задачи

1. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Решите систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Решите систему методом Крамера и матричным способом

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дана матрица линейного оператора в базисе (e_1, e_2, e_3) : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти

4.1. образ вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ при отображении A ,

4.2. матрицу A' этого оператора в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) , если

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ e'_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e'_3 = e_1 + e_2 + 2e_3; \end{cases}$$

4.3. координаты вектора $x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) .

5. Вычислите размерность и базис линейной оболочки векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , если

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 3, 0)$ и параллельной прямым l_1, l_2 , если

$$l_1: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y + 5z + 1 = 0, \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} -x + y = 1, \\ 5x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые l_1, l_2

$$l_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad l_2: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{1}.$$

8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые l_1, l_2

$$l_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad l_2: \frac{x+5}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Задачи повышенной сложности

1. Решите систему методом Гаусса:

$$1.1 \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

$$1.2 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.3 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$$

2. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите размерность и базис суммы и пересечения линейных пространств $L_1 + L_2$, где $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3, -2)$ перпендикулярно прямой l_1 и пересекающей прямую l_2 , если

$$l_1: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}, \quad l_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{5}.$$

5. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1, 1, -1)$ и пересекающей две прямые l_1, l_2 , если

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}, \quad l_2: \frac{x}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{2}.$$

6. По заданной системе векторов:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

постройте ортонормированную систему методом Грама-Шмидта.

7. Приведите квадратичную форму к каноническому виду и укажите преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, исследуйте квадратичную форму на знакоопределенность:

$$7.1 \quad q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2;$$

$$7.2 \quad q(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2.$$