

На правах рукописи



Уткин Максим Олегович

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООТВОДА ОТ
ПОДЗЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ГРУНТОВЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ**

2.4.6. Теоретическая и прикладная теплотехника

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Казань – 2026

Работа выполнена на кафедре «Автоматизация технологических процессов и производств» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанский государственный энергетический университет».

Научный руководитель –	Дмитриев Андрей Владимирович , доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанский государственный энергетический университет».
Официальные оппоненты:	Султангузин Ильдар Айдарович , доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Энергоэффективные инженерные системы» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва; Лопатин Алексей Александрович , кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Реактивные двигатели и энергетические установки» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ», г. Казань.
Ведущая организация –	федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет», г. Самара.

Защита диссертации состоится 17 декабря 2026 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.310.03, созданного на базе ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет» (420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51, зал заседаний диссертационного совета Д-224).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет» и на сайте <https://kgeu.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета**



Борисова Светлана Дмитриевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы обусловлена активным развитием подземных инженерных систем, таких как трубопроводы теплоснабжения, геотермальные контуры тепловых насосов, кабельные линии и системы аккумулирования тепловой энергии, для которых грунт выступает естественным теплоаккумулятором и средой рассеивания тепловых потоков. Надежное и энергоэффективное проектирование таких объектов требует достоверного прогнозирования стационарных температурных полей в грунте от одиночных и групповых источников сферической или цилиндрической геометрии, что напрямую определяет рациональную глубину заложения и шаг прокладки коммуникаций. Существующие подходы к расчету теплоотвода имеют некоторые ограничения. Несмотря на развитие численного моделирования, достижение сеточной независимости для полуограниченного массива грунта требует расширения расчетной области, что делает такие методы вычислительно затратными и малопригодными для инженерного проектирования. Отсутствие научно обоснованных рекомендаций по выбору рациональных границ моделируемого массива и оценке погрешности вычислений обуславливает необходимость разработки простых, достоверных и верифицированных приближенно-аналитических методов расчета стационарного теплоотвода в грунте.

Степень научной разработанности проблемы. Решением задачи стационарных тепловых процессов для систем теплоотвода от одиночных и групповых источников в разные годы занимались Г. Карслоу, Д. Егер, А.Ю. Крайнов, П.Я. Полубаринова-Кочина, В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел, Н.Д. Якимов, А.Б. Гаряев, В.В. Бухмиров и другие отечественные и зарубежные ученые. Большое количество работ посвящено изучению теплообмена при передаче тепла от тела к окружающей среде. Однако, имеется недостаток научно обоснованных рекомендаций по выбору геометрических параметров расчетной области, оценке погрешности вычислений математического моделирования при расчете теплораспределения в грунте. Обозначенные выше практические и теоретические проблемы позволили сформулировать цель и задачи настоящего исследования.

Объектом исследования являются тепловые процессы в грунте, возникающие при отводе теплоты от сферических тел и цилиндрических труб, расположенных под поверхностью земли.

Предметом исследования являются закономерности стационарного теплопереноса в однородном грунте от заглубленных изотермических источников сферической и цилиндрической формы, включая взаимное тепловое влияние параллельных труб, влияние конвективного теплообмена на поверхности грунта и зависимости теплового потока и температурного поля от геометрических и теплофизических параметров системы.

Цель работы и основные задачи исследования. Целью работы является разработка, теоретическое обоснование и проверка комплекса приближенно-аналитических моделей и инженерных методов расчета стационарного теплоотвода в грунте от заглубленного сферического тела, одиночной горизонтальной трубы и периодического ряда параллельных труб с учетом конвективного теплообмена на поверхности грунта, взаимного влияния источников и погрешности принятых приближений.

Задачи исследования:

1. Провести анализ существующих аналитических, численных и инженерных методов расчета стационарных температурных полей и тепловых потоков от заглубленных источников и определить ограничения их применения.
2. Получить приближенно-аналитическое решение задачи стационарного теплоотвода от изотермического сферического тела в полуограниченном массиве грунта при конвективном теплообмене на его поверхности.
3. Получить аналитические зависимости для расчета теплового потока, температурного поля и температуры на поверхности грунта при теплоотводе от одиночной горизонтальной цилиндрической трубы.
4. Получить аналитические зависимости для расчета теплового потока от периодического ряда параллельных труб с учетом их взаимного теплового влияния, определить положение эквивалентного линейного источника и зависимости теплоотвода от радиуса, глубины заложения и шага труб.
5. Разработать способы оценки погрешности замены граничного условия III рода эквивалентным слоем грунта и замены реальных поверхностей источников эквивалентными источниками.
6. Разработать алгоритмы и программу для инженерного расчета, а также апробировать предложенную методику на примере подземного трубопровода системы обогрева теплицы и оценить технико-экономический эффект решения.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы физического и математического моделирования стационарной теплопроводности; решение уравнения Лапласа для избыточной температуры при граничных условиях I и III рода; зеркальных отображений и суперпозиции; аналитические преобразования с применением гиперболических функций; решение нелинейных алгебраических уравнений; оценка погрешности приближенных решений. Численное моделирование выполнялось методом конечных объемов в ANSYS Fluent. Экспериментальная проверка включала многоточечную контактную термометрию, тепловизионную съемку, измерение влажности и косвенное определение плотности грунта с последующим сопоставлением расчетных и экспериментальных температурных зависимостей.

Научная новизна работы:

1. Получено и теоретически обосновано приближенно-аналитическое решение задачи стационарного теплоотвода от изотермического сферического тела в полуограниченном массиве грунта, учитывающее конвективный теплообмен на поверхности посредством эквивалентного слоя и позволяющее рассчитывать температурное поле, суммарный тепловой поток и погрешность принятого приближения.
2. Разработано аналитическое описание теплоотвода от одиночной горизонтальной цилиндрической трубы. Установлена связь между фактической глубиной заложения трубы и положением эквивалентного линейного источника, получены зависимости для теплового потока, температурного поля и температуры на поверхности грунта.
3. Получено приближенно-аналитическое решение для периодического ряда параллельных труб, учитывающее их взаимное тепловое влияние. Выведена

зависимость для расчета теплового потока и распределения температуры и плотности теплового потока на поверхности грунта.

4. Установлены зависимости погрешности от безразмерных геометрических параметров и числа Био, а корректность полученных соотношений подтверждена анализом предельных переходов к частным расчетным случаям.

5. Получены экспериментальные данные о формировании температурного поля вокруг одиночной нагретой трубы в сухом и увлажненном грунте. Подтверждена применимость разработанного аналитического описания к воспроизведенным лабораторным условиям.

Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов достигается путем сочетания математического моделирования и физического эксперимента. Достоверность научных положений, теоретических выводов и практических рекомендаций диссертации подтверждается хорошим совпадением результатов математического моделирования с экспериментальными данными, а также широкой публикацией результатов и их обсуждением на международных и российских конференциях.

Теоретическая значимость работы включает в себя развитие методов приближенно-аналитического моделирования стационарных тепловых полей в полуограниченных средах с учётом реальных граничных условий III рода на поверхности, вывод новых аналитических соотношений, описывающих связь между геометрическими параметрами системы и характеристиками теплового поля.

Практическое значение работы:

1. Разработаны инженерные методики расчета стационарного теплового потока и температурного поля от заглубленного сферического тела, одиночной трубы и периодического ряда труб, пригодные для предварительных проектных расчетов без выполнения длительного численного моделирования.

2. Полученные зависимости и погрешности позволяют выбирать глубину заложения и шаг труб, оценивать взаимное влияние соседних трубопроводов, неравномерность теплового потока на поверхности грунта и допустимость используемых упрощений.

3. Разработан алгоритм расчета теплоотвода от одиночной трубы и создана программа для ЭВМ (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2026618567).

4. Разработанные методики могут быть использованы при расчете грунтовых теплообменников, тепловых потерь подземных тепловых сетей, систем подогрева дорожных покрытий и антиобледенения, кабельных линий.

На защиту выносятся:

1. Приближенно-аналитический метод расчета стационарного теплоотвода от изотермического сферического тела в полуограниченном грунтовом массиве при конвективном теплообмене на поверхности.

2. Аналитическая модель стационарного теплоотвода от одиночной горизонтальной цилиндрической трубы, устанавливающая связь между геометрическими и теплофизическими параметрами системы, положением эквивалентного источника, отводимым тепловым потоком и распределением температуры и плотности теплового потока в грунте и на его поверхности.

3. Приближенно-аналитическая модель периодического ряда параллельных труб с учетом взаимного теплового влияния, включая зависимость смещения эквивалентного источника от радиуса, глубины заложения и шага труб.

4. Результаты численной и экспериментальной проверки температурного поля от одиночной трубы в сухом и увлажненном грунте, подтверждающие применимость разработанных моделей и инженерных алгоритмов в исследованном диапазоне параметров.

Апробация работы. Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и творчество: вклад молодежи» (ДГТУ, г. Махачкала, 2022г.); на всероссийском аспирантско-магистерском научном семинаре, посвященном Дню Энергетика (КГЭУ, г. Казань, 2023-2025г.); на национальной с международным участием научно-практической конференции «Энергосбережение и инновационные технологии в топливно-энергетическом комплексе» (ТИУ, г. Тюмень, 2022, 2024г.); на международной молодежной научной конференции «Тинчуринские чтения» (КГЭУ, г. Казань, 2023-2025г.); на XXXII международном молодежном форуме «Ломоносов-2025» в Узбекистане (Узбекистан, г. Ташкент, 2025г.); на всероссийской научно-практической конференции «Современные вызовы и стратегии в области экономики, инженерии, технологии» (ЕТИ ФГАОУ ВО МГТУ «СТАНКИН», г. Егорьевск, 2025г.); на 61-ой научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов «Электронные системы и технологии» (БГТУ, Белоруссия, г. Минск, 2025г.); на итоговой научной конференции Казанского федерального университета за 2023 год (КФУ, г. Казань, 2023г.); на XVII всероссийской открытой молодежной научно-практической конференции «Диспетчеризация и управление в электроэнергетике» (КГЭУ, г. Казань, 2025г.); на всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XVII Камские чтения» (КФУ, г. Набережные Челны, 2025г.); на XXIX Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные технологии на железнодорожном транспорте» (ИрГУПС, г. Красноярск, 2025г.); на XVIII международной студенческой научно-практической конференции «Наука и молодежь: шаг в будущее» (КФУ, г. Елабуга, 2025г.); на всероссийском конкурсе научных работ им. Н.И. Лобачевского 2.0 (КГЭУ, г. Казань, 2025г.); на всероссийской научно-технической конференции, посвященной 50-летию первого выпуска инженеров-протеплоэнергетиков «Теоретические и прикладные задачи энергетики» (ВГТУ, г. Воронеж, 2025г.).

Публикация работы. По теме диссертационной работы опубликовано 15 работ, из них 7 – в научных изданиях, входящих в перечень ВАК и приравненных к ним, в том числе 4 по научной специальности 2.4.6. «Теоретическая и прикладная теплотехника»; 7 работ в материалах конференций различного уровня; свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Вклад автора в проведенное исследование. Автор лично участвовал в постановке цели и задач исследований, разработке математической модели и инженерной методики расчета, проведении численного моделирования, в получении результатов, представленных в диссертации и публикациях.

Соответствие диссертации научной специальности. Диссертация соответствует паспорту специальности 2.4.6. «Теоретическая и прикладная теплотехника» и охватывает следующие направления: П6. Научные основы повышения эффективности использования энергетических ресурсов в теплотехническом оборудовании и использующих теплоту системах и установках. П8. Новые конструкции теплопередающих и теплоиспользующих установок и оборудования, обладающих улучшенными эксплуатационными и технико-экономическими характеристиками. Совершенствование методов расчета и оптимизация параметров использующих теплоту технологических процессов, оборудования и систем. П9. Системы обеспечения теплового режима теплоэнергетических, промышленных и коммунальных объектов, теплопотребляющего и тепловыделяющего оборудования, методы их совершенствования. Математическое моделирование и оптимизация энерготехнологических систем промышленных предприятий и систем теплоснабжения зданий, районов и городов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 182 страницах текста, включающего 88 рисунков и 37 таблиц, состоит из введения, 5 глав, заключения, 3 приложений, списка сокращений и условных обозначений и списка литературы из 117 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и поставлены задачи исследования. Показана научная и практическая значимость полученных результатов. Обозначены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе выполнен обзор литературы по расчету теплового потока от заглубленных тел в грунте и проанализированы существующие инженерные методики. Установлено, что они не позволяют в полной мере решить задачу расчета теплоотвода от сферических и цилиндрических источников и определения температуры на поверхности грунта. Также рассмотрены виды низкопотенциальных источников тепла, сферы их применения и актуальные проблемы сельского хозяйства РФ. Для устранения выявленных недостатков разработан математический аппарат приближенно-аналитического расчета стационарного теплоотвода от заглубленных сферических и цилиндрических источников, а также их периодических рядов в полуограниченном грунтовой массиве с математически обоснованной оценкой погрешностей. Данный аппарат позволяет проводить быструю оценку и параметрическую оптимизацию систем подземного аккумулирования тепла, грунтовых теплообменников тепловых насосов, магистральных трубопроводов в условиях криолитозоны, высоковольтных кабельных сетей и инфраструктурных комплексов активного антиобледенения. Помимо решения прикладных задач нефтегазового и строительного секторов с учетом взаимного теплового влияния магистралей и конвекции на поверхности, предложенные аналитические зависимости могут служить эталонными тестовыми задачами для верификации сеточных моделей в коммерческих CFD-комплексах, позволяя корректно задавать граничные условия на бесконечности и существенно снижать вычислительные затраты.

В второй главе рассматривается установившийся теплоотвод от сферического тела, а также от одиночно проложенной трубы и от ряда труб, расположенных под горизонтальной поверхностью грунта. Сферическое тело радиусом R и температурой его поверхности t_w расположено под горизонтальной поверхностью грунта. Глубина заложения тела от поверхности до верхней точки равна h_0 . Массив грунта с коэффициентом теплопроводности $\lambda = \text{const}$ является однородным и занимает полупространство. На поверхности грунта коэффициент теплоотдачи к воздуху равен α . Температура грунта с удалением от тела приближается к температуре воздуха, равной t_0 , где $t_0 < t_w$. Проводится учет условия теплопередачи. В первом упрощении термическое сопротивление теплоотдачи с коэффициентом α совпадает с сопротивлением теплопроводности слоя среды толщиной σ . Проводится наращивание верхней границы грунта слоем толщиной $\sigma = \lambda/\alpha$, что сводится к замене в постановке значения заглубления тела h_0 на $h_1 = h_0 + \sigma$. На верхней границе принимаем условие I рода $\vartheta|_{z_1=0} = 0$. Если σ малое по сравнению с h_0 и R , то линии теплового потока в этом слое толщиной σ будут мало отличаться от вертикальных перпендикулярных слою, то есть погрешность при такой замене условия теплоотдачи на дополнительный слой грунта будет небольшой. При выполнении расчетов использована замена поля от рассматриваемого тела на поле от точечных источников-стоков. Производится замена сферического тела с изотермической поверхностью. Приводится математический аппарат, описывающий распределение температур по поверхности грунта, после чего оценивается погрешность замены переменных. Ниже приведены основные формулы расчета (1-3).

$$\vartheta = \frac{(a^2 - h^2)}{2h} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (h + R - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (h + R + a)^2}} \right) \vartheta_w, \quad (1)$$

$$\delta = \frac{(a^2 - h^2)}{2h} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (h + R - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (h + R + a)^2}} \right) - 1, \quad (2)$$

$$K^* = K / (1 + \delta / 2), \quad Q^* = \lambda h K^* \vartheta_w \quad (3)$$

Расчёт искомого теплового потока Q^* при заданных исходных параметрах будет состоять из расчёта температурного напора $\vartheta_w = t_w - t_0$, учёта сопротивления теплоотдачи $h = h_0 + \lambda/\alpha$, определения K^* по отношению R/h , расчёта искомого потока $Q^* = \lambda h K^* \vartheta_w$ и определения порядка точности δ замены.

В работе рассматривается установившийся отвод теплоты от цилиндрической трубы неограниченной длины с радиусом R и температурой её поверхности t_w , расположенной под горизонтальной поверхностью грунта. Глубина заложения от поверхности грунта до оси трубы равна b^* , где $b^* > R$. Массив грунта с коэффициентом теплопроводности $\lambda = \text{const}$ является однородным и занимает полупространство. На поверхности грунта коэффициент теплоотдачи к воздуху равен α . Температура грунта с удалением от трубы приближается к температуре воздуха, равной t_f , где $t_f < t_w$. В работе определяется тепловой поток Q , отводимый от трубы, и распределение температуры в грунте, в частности, температуры t_0 на его поверхности, а также распределение плотности

теплового потока на поверхности грунта q_0 . Задача рассматривается в плоской постановке. Искомая функция $\vartheta(x, y)$ должна удовлетворять уравнению стационарной теплопроводности $\nabla^2 \vartheta = 0$ в рассматриваемой области $(x^2 + (y + b)^2 > R^2) \cap (y < 0)$ при граничных условиях $\vartheta|_{y=0} = 0$ и $\vartheta|_{x^2 + (y+b)^2 = R^2} = \vartheta_w$. Дополнительно приводится обоснование точного решения, находится общий поток трубы Q , рассчитывается вертикальная составляющая q_y плотности теплового потока $q_y = -\lambda \partial \vartheta / \partial y$, вводится вспомогательный параметр p_0 , определяется распределение плотности теплового потока на поверхности грунта $q_0(x)$, а также вычисляется температура на поверхности грунта. Выполняется оценка различия b и h . Приводится математический аппарат определения погрешности. Проведена проверка, что вдоль контура трубы температура остаётся неизменной. Ниже приведены основные формулы расчета (4-6).

$$\vartheta(x, y) = \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y - h)^2}{x^2 + (y + h)^2}}, \quad (4)$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda}{\ln p_0} \vartheta_w, \quad p_0 = \frac{b}{R} + \sqrt{\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1}, \quad (5)$$

$$q_0(x) = (Q / \pi) \cdot (h / (x^2 + h^2)), \quad t_0(x) = t_f + q_0(x) / \alpha. \quad (6)$$

Далее в работе рассматривается приближённо-аналитическое решение для установившегося теплоотвода от ряда цилиндрических труб неограниченной длины с радиусом R и температурой их поверхности t_w , расположенных параллельно под горизонтальной поверхностью грунта на расстоянии l друг от друга (рис. 1). Глубина заложения от поверхности грунта до оси трубы равна b^* , где $b^* > R$. Массив грунта с коэффициентом теплопроводности $\lambda = \text{const}$ является однородным и занимает полупространство. На поверхности грунта коэффициент теплоотдачи к воздуху с температурой t_f , где $t_f < t_w$, равен α . Температура грунта с удалением от труб приближается к температуре воздуха. Требуется определить тепловой поток Q , отводимый от каждой трубы, и распределение температуры в грунте, в частности, температуры t_0 на его поверхности, а также распределение плотности теплового потока на поверхности грунта q_0 . Задача рассматривается в плоской постановке, картина периодическая, с периодом l по горизонтальной оси x . Поэтому в качестве области достаточно рассматривать один период – полуполосу шириной l вниз от поверхности грунта. Вертикальные границы $x = \pm l/2$ этой области являются линиями теплового потока, центр трубы на линии $x = 0$. Вместо температуры t целесообразно рассматривать избыточную температуру $\vartheta(x, y) = t(x, y) - t_f$, обозначив, соответственно, $\vartheta_w = t_w - t_f$. Проводится замена условия теплоотдачи на поверхности грунта как в случае для одиночной трубы. Линии теплового потока будут подходить к поверхности грунта почти

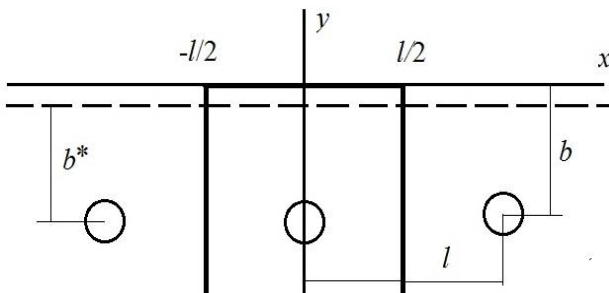


Рис. 1 – Расчетная схема для ряда труб, расположенных параллельно

удалением от труб приближается к температуре воздуха. Требуется определить тепловой поток Q , отводимый от каждой трубы, и распределение температуры в грунте, в частности, температуры t_0 на его поверхности, а также распределение плотности теплового потока на поверхности грунта q_0 . Задача рассматривается в плоской постановке, картина периодическая, с периодом l по горизонтальной оси x . Поэтому в качестве области достаточно рассматривать один период – полуполосу шириной l вниз от поверхности грунта. Вертикальные границы $x = \pm l/2$ этой области являются линиями теплового потока, центр трубы на линии $x = 0$. Вместо температуры t целесообразно рассматривать избыточную температуру $\vartheta(x, y) = t(x, y) - t_f$, обозначив, соответственно, $\vartheta_w = t_w - t_f$. Проводится замена условия теплоотдачи на поверхности грунта как в случае для одиночной трубы. Линии теплового потока будут подходить к поверхности грунта почти

перпендикулярно. Влияние термического сопротивления теплоотдачи на поверхности грунта можно считать эквивалентным термическому сопротивлению слоя грунта толщиной $\sigma^* = \lambda/\alpha$. Вместо исходной области рассматривается область с размещённым поверх исходной поверхности грунта ещё слоя толщиной σ^* , на верхней границе которого температура равна температуре воздуха. Используемая приведенная постановка отличается глубиной заложения трубы $b = b^* + \sigma^*$ при граничном условии I рода $\vartheta|_{y=0} = 0$. На этой приведённой

поверхности грунта, считается, что начало координат (x, y) находится в точке $x = 0, y = -b$. В применяемом далее подходе к решению задачи предполагается поле от круглой трубы в полу-полосе заменять полем от точечного источника подходящей интенсивности Q . Так как изотермы малого радиуса около источника близки к окружностям, контур трубы можно считать заменённым соответствующей близкой изотермой. В ином случае можно считать, что на контуре трубы, точной окружности радиуса R , температура θ_w оказывается заданной с некоторой погрешностью. Заметим, что при малом радиусе трубы, то есть $R \ll \min(l, b^*)$, можно считать источник расположенным в точке центра трубы. Однако, если размеры трубы относительно не очень малы, погрешность можно уменьшить, выбирая расположение источника с некоторым смещением от центра трубы, то есть на некоторой глубине h , где $h \neq b$. Таким образом, искомая функция $\vartheta(x, y)$ должна удовлетворять уравнению стационарной теплопроводности $\nabla^2 \vartheta = 0$ в рассматриваемой области $(|x| < l/2) \cap (y < 0)$ при граничных условиях $\vartheta|_{y=0} = 0$ и $\partial \vartheta / \partial x|_{x=\pm l/2} = 0$, когда в точке $x = 0, y = -h$ находится источник некоторой интенсивности Q . Решив уравнения в мнимых, а затем, в действительных единицах, получим соотношения в области $l/2 < x < l/2, y < 0$. Получим следующие математические уравнения (7):

$$Q = \frac{2\pi\lambda\vartheta_w}{\ln \operatorname{sh}(2\pi h/l) - \ln \operatorname{sh}(\pi R/l)}, \quad \vartheta(x, y) = \frac{Q}{4\pi\lambda} \ln \frac{\sin^2(\pi x/l) + \operatorname{sh}^2(\pi(y-h)/l)}{\sin^2(\pi x/l) + \operatorname{sh}^2(\pi(y+h)/l)}. \quad (7)$$

Далее проводится нахождение положения источника. В работе предлагается заменять контур трубы той изотермой от источника, которая совпадает с контуром трубы в его верхней точке с координатами $x = 0, y_1 = -b + R$ при $\delta = 0$. Для уменьшения погрешности выбирается δ так, чтобы соответствующая изотерма касалась контура трубы не только в верхней, но и в нижней точке, где $x = 0, y_2 = -b - R$. Подставив $h = b - \delta$ вместе с y_1 и y_2 , получено уравнение для определения δ . Его решение имеет вид уравнения (8), где M – вспомогательный параметр:

$$M = \operatorname{th} \frac{2\pi b}{l} \cdot (1 + \operatorname{th}^2 \frac{\pi R}{l}) / 2, \quad \delta = \frac{l}{\pi} \operatorname{Arth}(M - \sqrt{M^2 - \operatorname{th}^2 \frac{\pi R}{l}}). \quad (8)$$

На рис. 2 представлены относительные значения смещения δ/R для разных исходных данных задачи. При относительно небольших размерах R/b трубы, величина смещения источника оказывается небольшой даже относительно радиуса трубы. То есть таким смещением источника можно пренебрегать, принимая $h = b$. Но при соизмеримых радиусах труб смещение становится

заметным и его нужно учитывать. При этом чем ближе друг к другу расположены трубы, тем большим оказывается смещение.

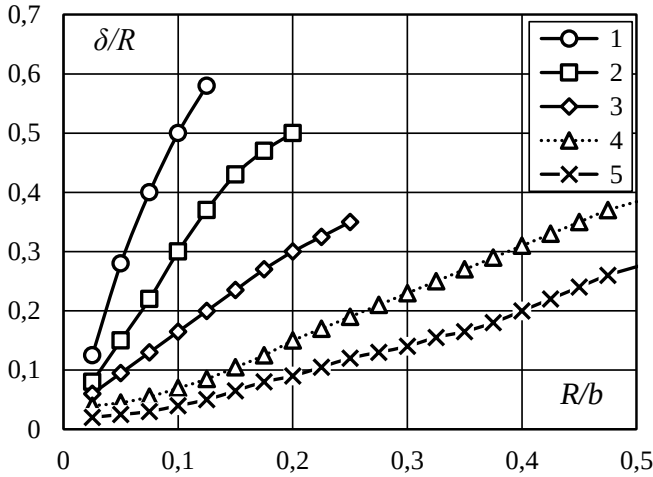


Рис. 2 – Значения смещения δ/R для разных исходных данных задачи: 1 – $l/b = 0,5$; 2 – $l/b = 1$; 3 – $l/b = 2$; 4 – $l/b = 5$; 5 – $l/b \rightarrow \infty$

совпадающую с окружностями, поэтому на контуре трубы температура будет несколько отличаться от постоянной. Так как положение источника выбрано так, чтобы температура имела одно значение в верхней и нижней точках трубы, то следует ожидать, что отличие от этого значения будет близко к наибольшему в крайних правой и левой точках с координатами $x = \pm R$, $y = -b$. Порядок относительной погрешности, как отклонения от заданной температуры можно подсчитать по формуле:

$$\Delta_0 = 0,5 \cdot (9(0,5l - b + R) / (9(R - b)) - 1), \quad (9)$$

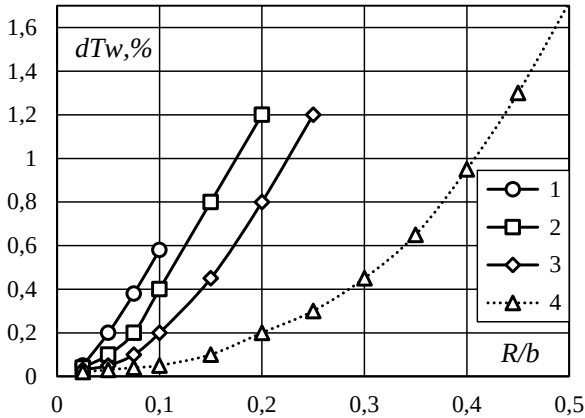


Рис. 3 – Погрешность температуры: 1 – $l/b = 0,5$; 2 – $l/b = 1$; 3 – $l/b = 2$; 4 – $l/b = 5$

рис. 3 представлен расчёт относительных погрешностей по уравнению (9) на основе уравнений ((7) в процентах. Выявлено, что погрешности при исходных данных оказываются небольшими, в доли процента (рис. 3). Определяется общий поток трубы Q . Для применения уравнений ((7) остаётся определить значение Q . Если $\delta \neq 0$, то

$$Q = \frac{2\pi\lambda\vartheta_w}{\ln \operatorname{sh}(\pi(2b - R - \delta)/l) - \ln \operatorname{sh}(\pi(R - \delta)/l)} \quad (10)$$

После нахождения значений в уравнении (8), по δ определена $h = b - \delta$. Для уравнения (8) получаем $\lim_{l \rightarrow \infty} \delta = b - \sqrt{b^2 - R^2}$. Или для $h = b - \delta$ в пределе будет $h^2 = b^2 - R^2$ при $l \rightarrow \infty$. То есть уравнение (8) при росте l , переходит в соответствующее соотношение для случая одиночной трубы. В работе определяется погрешность замены контура трубы на источник. Изотермы теплового поля около источника в данной схеме будут иметь форму близкую, но не точно

Так как с уменьшением радиуса изотерм их форма приближается к круглой, можно ожидать, что относительная погрешность уменьшается с R при исходных данных. При больших l решение приближается к решению для одиночной трубы. При $l \gg b$ в центральной части области, размером b , значения температур близки для одиночной трубы. Изотермы приближаются по форме к окружностям. Значит, относительная погрешность Δ_0 при больших l будет падать до нуля. На

Плотность теплового потока и температуру поверхности можно найти по формулам (11):

$$q_0(x) = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{Q}{l} \frac{\operatorname{sh}(\pi h/l) \cdot \operatorname{ch}(\pi h/l)}{\sin^2(\pi x/l) + \operatorname{sh}^2(\pi h/l)} \text{ и } t_0(x) = t_f + \frac{q_0(x)}{\alpha} \quad (11)$$

При рассмотрении предельных случаев $h \gg l$ и $l \gg h$ сделаны выводы, что при больших заглублениях труб относительно шага тепловой поток распределяется по поверхности равномерно и при больших шагах расположения труб распределение теплового потока $q_0(x)$ непосредственно над трубой при небольших x по сравнению с l ведёт себя как в случае одиночной трубы.

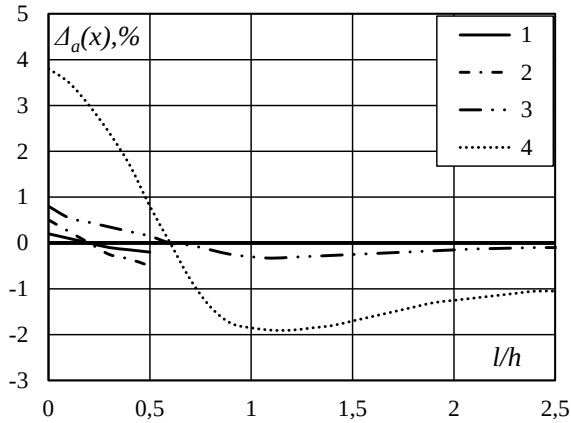


Рис. 4 – Распределение погрешности теплоотдачи: 1 – $Bi=6$, $l/h=1$; 2 – $Bi=4$, $l/h=1$; 3 – $Bi=10$, $l/h=5$; 4 – $Bi=4$, $l/h=5$

$\tilde{\alpha}(x)$, который для найденного поля $\vartheta(x, y)$ можно определить по формуле $\tilde{\alpha}(x) = -(\lambda / \vartheta(x)) \cdot (\partial \vartheta / \partial y) \Big|_x$, где все значения берутся на линии $y = -\sigma^*$.

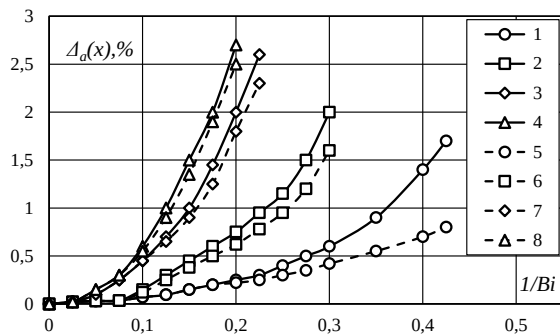


Рис. 5 – Распределение погрешности теплоотдачи, при $x=0$: 1 – $l/h=1$; 2 – $l/h=1,5$; 3 – $l/h=3$; 4 – $l/h=\infty$; 5 – $l/h=-1$; 6 – $l/h=-1,5$; 7 – $l/h=-3$; 8 – $l/h=-\infty$

Определяется погрешность моделирования теплоотдачи. Реальной поверхности грунта соответствует линия $y = -\sigma^*$ и на ней в исходной постановке должно выполняться условие теплоотдачи Ньютона–Рихмана. Это условие моделируется введением дополнительного слоя грунта толщиной $\sigma^* = \lambda/\alpha$, в результате чего для найденного поля $\vartheta(x, y)$ выполняется лишь приближённо. Но можно считать, что это условие выполняется точно с некоторым другим переменным коэффициентом

Сопоставление полученного $\tilde{\alpha}(x)$ с исходно задаваемым α позволит судить о точности применённого способа моделирования теплоотдачи. Результаты распределения погрешности теплоотдачи представлены на рис. 4. Число Био Bi определяется, как $Bi = \alpha h / \lambda = h / \sigma^*$, то есть относительная толщина фиктивного слоя $\sigma^*/h = 1/Bi$. Распределение погрешности теплоотдачи при $x=0$ показано на рис. 5. По расчётам можно сделать

следующие выводы, что погрешность с уменьшением шага труб l сильно уменьшается. Так как с сближением «стенок» $x = \pm l/2$ тепловой поток выравнивается, приближается к равномерному поступательному, что предполагается при введении слоя σ^* . Погрешность незначительна, особенно при не очень больших относительных шагах h/l (рис. 4), а наибольшая по абсолютной величине погрешность имеет место при $x=0$, непосредственно над трубой. Исходя из вышеописанного, получено уравнение (12):

$$\Delta\alpha|_{x=0} = \frac{\pi\sigma^*}{l} \cdot \frac{\operatorname{cth}(\pi(h+\sigma^*)/l) + \operatorname{cth}(\pi(h-\sigma^*)/l)}{\ln \operatorname{sh}(\pi(h+\sigma^*)/l) - \ln \operatorname{sh}(\pi(h-\sigma^*)/l)} - 1. \quad (12)$$

Расчёты по уравнению (12) показаны на рис. 5 сплошными линиями. Для уравнения (12) можно дать упрощенную приближённую формулу (13):

$$\Delta\alpha|_{x=0} \approx \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\operatorname{Bi}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pi h / l}{\operatorname{sh}(\pi h / l)} \right)^2, \quad (13)$$

с остатком порядка $O((1/\operatorname{Bi})^4)$. Видно, что при $\operatorname{Bi} > 6$ они практически совпадают с получаемыми по точной зависимости, что соответствует диапазону практических данных. При этом погрешность замены менее процента, если $l/h < 3$. Также можно отметить, что при $l \rightarrow \infty$ определяется параметр

$\Delta\alpha(x) \approx \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\operatorname{Bi}} \right)^2$, как и в случае одиночной трубы. Решение рассматриваемой

задачи будет состоять в следующем: по значениям b^* , R , l , α , λ , t_w , t_f рассчитываются вспомогательные значения $\sigma^* = \lambda/\alpha$, $b = b^* + \sigma^*$, $\vartheta_w = t_w - t_f$. По ((8) определяются δ и $h = b - \delta$, находится Q , $q(x)$ и $t_0(x)$. В работе проведено исследование предельных переходов к частным случаям. Результаты таких переходов подтверждают правильность выведенных формул, раскрывают механизм и способствуют пониманию их действия. Помимо прямой задачи о тепловых характеристиках задаваемой системы труб получено решение вопроса о соотношении заглубления и шага труб, обеспечивающего допустимую неравномерность теплового потока у поверхности грунта.

В третьей главе выполнено математическое моделирование тепловых процессов в грунте для одиночной трубы методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS Fluent. Целью исследования являлось определение геометрических параметров системы утилизации

низкопотенциального тепла. Были смоделированы зависимости тепловых потоков от трубы и верхнего слоя грунта к температуре наружного воздуха. Выявлено, что полученные расчетные данные не выходят на асимптоту, а дальнейшее увеличение расчетной области не обеспечивает сеточную независимость. Это свидетельствует об ограничениях штатного математического аппарата ANSYS Fluent, который не позволяет в полной мере корректно рассчитать теплосъем от одиночно проложенной трубы. В связи с этим для оценки теплораспределения по поверхности грунта от одиночной или ряда труб, а также для сравнительного анализа с результатами

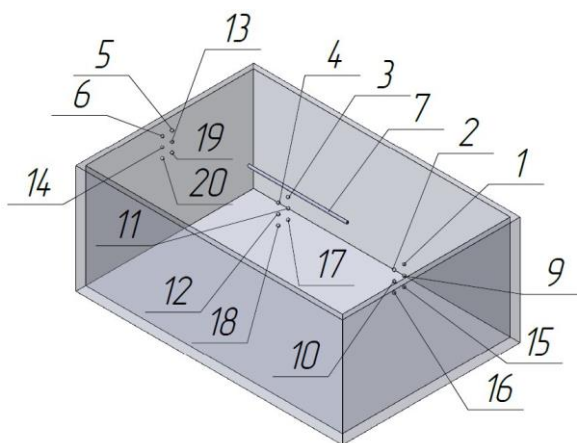


Рис. 6 – Расположение и глубина залегания датчиков (аксонометрический вид): 1-6 – верхний уровень (поверхность грунта); 9-16 – средний уровень (глубина залегания 2 см); 15-20 – нижний уровень (глубина залегания 4 см); 7 – температура резистора; 8 (позиция не показана) – температура наружного воздуха

экспериментальных исследований, необходимо использовать разработанный математический аппарат.

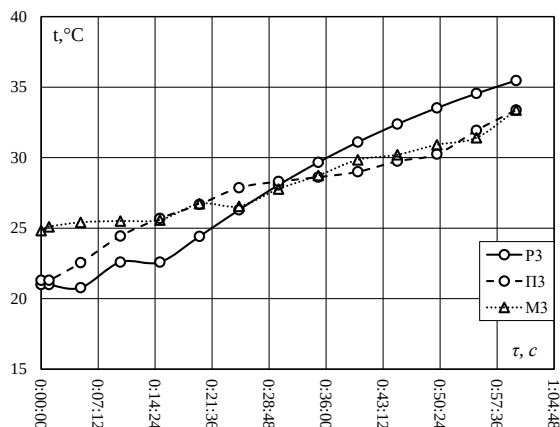


Рис. 7 – Температура грунта в точках P3, ПЗ, МЗ: П – точка практического эксперимента; Р – точка расчётного эксперимента в ANSYS Fluent; М – точка расчётного эксперимента по математическому аппарату

В четвертой главе представлены экспериментальные исследования теплораспределения в грунте для одиночно проложенной трубы. Эксперименты проведены для сухого и влажного грунта с учетом его теплофизических свойств. Плотность грунта определялась косвенным методом. На рис. 6 представлена схема расположения датчиков экспериментальной установки, которая включала ТЭН мощностью 255 Вт с глубиной залегания 5 мм и нагревом до 200 °С, систему датчиков температуры и влажности, тепловизор UTi260V и блок регистрации данных на базе контроллера

ATmega328. Дополнительно контролировались параметры окружающей среды. Теплопроводность грунта определена экспериментально. Построенная математическая модель теплораспределения подтверждена практическими данными (рис. 7) и полностью соответствует физическим процессам в реальных условиях.

В пятой главе проведены инженерные решения по отоплению теплицы с помощью подземного трубопровода. Выполнен расчет теплораспределения в грунте для тепличного хозяйства. Исходя из полученных результатов расчета, обогреваемое трубой расстояние рассчитано в 600 мм. Максимальное расстояние между трубами 1600 мм. Проведена оценка стоимости по обогреву зимней теплицы подземным трубопроводом. В случае применения предлагаемого решения стоимость составит 526 000 руб., что на 476 000 руб. дешевле применяемого решения по обогреву теплицы без заглубленного трубопровода.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построено приближённо-аналитическое решение задачи стационарного теплоотвода от сферического тела, расположенного в полупространстве грунта, с учётом конвективного теплообмена на поверхности грунта.

2. Разработана приближённо-аналитическая модель теплоотвода от одиночной горизонтальной цилиндрической трубы, заложённой в грунт. Обобщен подход к расчету на случай периодически расположенного ряда параллельных труб.

3. Оценена погрешность предложенных приближённых методов решения задачи стационарного теплоотвода от сферического тела, одиночной трубы, ряда труб, проложенных в грунте.

4. Разработаны алгоритмы практического применения полученных решений задачи стационарного теплоотвода для сферического тела, одиночной трубы и ряда труб в грунте для инженерных расчетов.

5. Предложен вариант применения обогрева теплицы подземным трубопроводом. В случае применения предлагаемого решения общая цена

составит 526 000 руб., что на 47,5 % дешевле применяемого решения по обогреву теплицы без заглубленного трубопровода.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы исследования диссертационной работы

Дополнить математический аппарат возможностью расчёта трубопроводов с теплоизоляцией. Изучить особенности распределения тепла при использовании грунта с неравномерной плотностью.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

В изданиях из перечня ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации:

1. **Уткин М.О.** Численное и экспериментальное исследование теплопереноса от цилиндрической трубы в грунте тепличного хозяйства / М.О. Уткин, А.В. Дмитриев, В.Э. Зинуров // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2025. Т. 27. № 5. С. 153-167. DOI 10.30724/1998-9903-2025-27-5-153-167.

2. **Utkin M.O.** Calculation of heat removal from a pipe buried in the soil / A.V. Dmitriev, N.D. Yakimov, V.V. Kharkov, M.O. Utkin // Bulletin of Donetsk National University. Series G: Technical Sciences. 2025. No. 3. P. 184-197. DOI 10.5281/zenodo.17395045.

В изданиях, включенных в международную базу цитирования SCOPUS и Web of Science:

3. **Utkin M.O.**, Yakimov N.D., Kharkov V.V., Badretdinova G.R., Dmitriev A.V. Approximate-Analytical Solution for Heat Removal from a Spherical Body in the Ground // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2025. Vol. 98. No. 5. Pp. 1362-1370. <https://doi.org/10.1007/s10891-025-03214-y>

4. Dmitriev A.V., Yakimov N.D., Kharkov V.V., **Utkin M.O.** Analytical Solution for Heat Removal from a Ground Tubular Heat Exchanger // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2026. Vol. 99. No 3. P. 715-724. <https://doi.org/10.1007/s10891-026-03352-x>

Публикации в других изданиях и материалах конференций:

5. **Уткин М.О.** Численное моделирование нагрева теплового накопителя энергии для обогрева тепличного хозяйства / А.В. Дмитриев, В.Э. Зинуров, М.О. Уткин, Д.Т. Халиуллин, О.С. Дмитриева // Вестник Казанского государственного аграрного университета. – 2025. – Т. 20, № 1(77). – С. 47-53. – DOI 10.12737/2073-0462-2025-1-47-53.

6. **Уткин М.О.** Моделирование циркуляции теплоносителя с фазовыми переходами в замкнутом контуре для обогрева теплиц на базе высокотемпературного накопителя энергии / В.Э. Зинуров, М.О. Уткин, А.В. Дмитриев, Д.Т. Халиуллин, О.С. Дмитриева // Вестник Казанского государственного аграрного университета. – 2025. – Т. 20, № 4(80). – С. 93-99. – DOI 10.12737/2073-0462-2025-20-4-93-99.

7. **Уткин М.О.** Численное моделирование теплопередачи и циркуляции теплоносителя в системе отопления тепличных хозяйств на основе тепловых накопителей энергии / О.С. Попкова, М.О. Уткин, В.С. Атлы // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2025. – № 208. – С. 303-310. – DOI 10.21515/1990-4665-208-028.

8. **Уткин М.О.** Моделирование распределения тепла в грунте / М.О. Уткин // Электронные системы и технологии: материалы 61-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГУИР, Минск, 21–25 апреля 2025 года. – Минск: Белорусский государственный университет информатики и

радиоэлектроники, 2025. – С. 700-702.

9. **Уткин М.О.** Исследование передачи тепла в накопителе энергии для агропромышленного комплекса / И.И. Шарипов, М.О. Уткин, И.Г. Кулай, М.Г. Кузнецов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2024. – № 204. – С. 326-334. – DOI 10.21515/1990-4665-204-033.

10. **Уткин М.О.** Низкопотенциальное тепло от энергетических установок и его утилизация / М.О. Уткин, А.В. Дмитриев // Энергосбережение и инновационные технологии в топливно-энергетическом комплексе: Материалы Национальной с международным участием научно-практической конференции студентов, аспирантов, учёных и специалистов. В 2-х томах, Тюмень, 18–20 декабря 2024 года. – Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2024. – С. 252-254.

11. **Уткин М.О.** Применение возобновляемых источников энергии для электроснабжения удаленных объектов нефтегазовой отрасли / М.О. Уткин, Н.С. Россамахина, А.В. Дмитриев // Наука и творчество: вклад молодежи: Сборник материалов всероссийской молодежной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Махачкала, 10–11 ноября 2022 года. – Махачкала: Типография ФОРМАТ, 2022. – С. 168-170.

12. **Уткин М.О.** Низкопотенциальное тепло и его утилизация в грунте / М.О. Уткин // Тинчуринские чтения - 2025 «Энергетика и цифровая трансформация»: Материалы докладов Международной молодежной научной конференции. В 4-х томах, Казань, 23–25 апреля 2025 года. – Казань: Казанский государственный энергетический университет, 2025. – С. 563-565.

13. **Уткин М.О.** Практический эксперимент и математическое моделирование по теме исследования распределения тепла в грунте / М.О. Уткин, Е.В. Федорова // Проблемы и перспективы развития энергетики: сборник материалов VII Всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции, Казань, 22–23 октября 2025 года. – Казань: Казанский государственный энергетический университет, 2025. – С. 820-823.

14. **Уткин М.О.** Применение низкопотенциального тепла в сельском хозяйстве / М.О. Уткин, Е.В. Федорова, А.В. Дмитриев, А.А. Любишев // Теоретические и прикладные задачи энергетики: Труды Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 50-летию первого выпуска инженеров-промотеплоэнергетиков, Воронеж, 28–29 октября 2025 года. – Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2025. – С. 198-201.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2026618567 Российская Федерация. Программа для получения расчета теплового потока для одиночно проложенной трубы в грунте: заявл. 19.03.2026; опубл. 26.03.2026 / **М.О. Уткин**, Н.Д. Якимов, А.В. Дмитриев, Г.Р. Бадретдинова; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский государственный энергетический университет».

Подписано в печать 15.10.2026.
Формат 60x84^{1/16}. Печать цифровая.
Усл. печ. 0,93 л. Печ. 1,0 л.
Тираж 100 экз. Заказ № 251.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в редакционно-издательском центре «Школа».
420111, Казань, Дзержинского, 9/1.
Тел. сот.: 8-9172-64-84-83
E-mail: ric-school@yandex.ru